§9. Дәрежелік қатарлар

x айнымалысының теріс емес, бүтін өспелі дәрежелері бойынша орналасқан және x-ке тәуелсіз $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ коэффициенттеріне ие болатын

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (3.27)$$

қатарын дәрежелік қатар дейді. Кейде

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ... \qquad (3.28)$$

(a – кейбір тұрақты сан) жалпы түріндегі дәрежелік қатар қарастырылады. (3.28) қатары $x - a = x'$ ауыстыруында оп-оңай (3.27) түріне келеді. Сондықтан бұдан былай көбіне (3.27) түріндегі дәрежелік қатарлармен айналысамыз.

(3.27) дәрежелік қатарының жинақтылығы жөніндегі мәселені талқылайық. x айнымалысына белгілі бір мән беріп, x-тің мәніне сәйкес жинақталатын немесе жинақталмайтын сандық қатар шығарып аламыз. Кез келген (3.27) дәрежелік қатары үшін айнымалы x-тің $|x| < R$ теңсіздігін қанағаттандыратын мәндерінде қатар жинақталатын, ал $|x| > R$ теңсіздігін қанағаттандыратын мәндерінде қатар жинақсыз болатын R оң саны әрқашан табылатынын дәлелдеуге болады. $|x| = R$, атап айтқанда, $x = R$ немесе $x = -R$ болуында дәрежелік қатар жинақты болуы да, жинақсыз болуы да мүмкін. R санын ***қатардың жинақтылық радиусы*** деп, ал *(-R, R)* аралығын ***дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы*** дейді. Егер $R=+\infty$ болса, жинақталу интервалы бүкіл сандық түзу болып келеді. Егер $R = 0$ болса, дәрежелік қатар $x = 0$ нүктесінде ғана жинақталып, жинақталу интервалы болмайды. Кейбір жағдайларда дәрежелік қатардың жинақталу радиусы Даламбер белгісі көмегімен табылуы мүмкін. Ол үшін (3.27) қатары мүшелерінің модульдерінен жасалған

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + ... + |a_n||x|^n + ... \qquad (3.29)$$

қатарын қарастырамыз. Осының алдында (§7) айтылғандай (3.29) қатары жинақталса, онда (3.27) қатары да жинақталады және жинақталуы абсолютті болады. (3.29) қатарының жинақтылығы жөніндегі мәселені шешу үшін Даламбердің жинақталу белгісін пайдаланамыз. (3.29) қатарының (n+1)-мүшесін v_n арқылы белгілейміз: $v_n = |a_n||x|^n$; бұдан $v_{n+1} = |a_{n+1}||x|^{n+1}$.

Енді $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|$ қатынасын құрамыз. $n\to\infty$ да $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ қатынасының шегі бар болсын деп ұйғарайық және оны l арқылы белгілейік:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l. \tag{3.30}$$

Сонда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n} = l|x|. \tag{3.31}$$

Егер $|x| < \dfrac{1}{l}$ болса, онда $l|x| < 1$, демек (3.29) қатары жинақталады. Сондықтан (3.27) қатары жинақталып, жинақталу абсолютті болады.

Егер $|x| > \dfrac{1}{l}$ болса, онда $l|x| > 1$. Даламбер белгісіне жасалған ескертуге сәйкес (3.29) және (3.27) қатарының екеуі де жинақталмайды. Сонымен $R = \dfrac{1}{l} \geq 0$ - дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы болып табылады және (3.30) қатынасына сәйкес

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{3.32}$$

формуласына келеміз.

(3.27) дәрежелік қатары *(-R, R)* жинақтылық интервалының ұштарында, атап айтқанда, $x= R$ және $x = -R$ мәндерінде жинақты бола ма деген сұрақ туындайды. Әрбір жеке жағдайға сәйкес бұл мәселенің шешілуінде де өзіне тән ерекшелігі болады.

Мысал. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + \ldots$

қатарын қарастырайық. Мұнда $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Жинақтылық радиусын анықтайтын (3.32) формуласына сәйкес

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 .$$

Демек (3.33) қатары (-1, 1) интервалында жинақталады. Осы қатар интервал ұштарында жинақты бола ма деген сұрақты шешу үшін, алдымен $x = 1$ деп ұйғарамыз. Сонда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

гармоникалық қатарға келеміз. Оның жинақталмайтынына §6-да көз жеткізгенбіз. Енді $x = -1$ деп алсақ (3.33) қатары

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{(-1)^n}{n}+...$$

түріне келеді. Бұл қатар Лейбниц теоремасына сәйкес шартты жинақталады. Сонымен, (3.33) қатарының жинақталу облысы - [-1, 1] аралығы.

§10. Дәрежелік қатарларды дифференциалдау және интегралдау

$$f\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \tag{3.34}$$

дәрежелік қатарының қосындысы, радиусы $R > 0$ болатын ($-R, R$) жинақтылық интервалында анықталған функция болып табылады. $f(x)$ функциясы дифференциалдамалы екенін және оның $f'(x)$ туындысын (3.34) қатарын мүшелеп, дифференциалдағаннан табуға болатынын дәлелдеуге болады. Атап айтқанда, $-R < x < R$ үшін

$$f'\left(x\right) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ... \ .$$

Осы айтылғанның бәрі жоғары ретті туындыларда да күшін сақтайды. Осыған ұқсас, жинақтылық интервалына тиіс барлық x мәндері үшін $f(x)$ функциясынан алынған анықталмаған интеграл (3.34) қатарын мүшелеп, интегралдаудан алынуы мүмкін, атап айтқанда, егер $-R < x < R$ болса, онда

$$\int f(x)dx = C + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad .$$

Сонымен, дәрежелік қатар өзінің жинақтылық интервалында, дифференциалдау және интегралдау амалдарына қатысты, шектеулі мүшесі бар көпмүшеден айнымайды.

§11. Берілген функцияны дәрежелік қатарға жіктеу

Қолданбаларда, берілген $f(x)$ функциясын дәрежелік қатарға жіктеуді білген аса маңызды. $f(x)$ функциясын дәрежелік қатардың қосындысы түрінде кескіндегенде, осы функция мәнін кез келген дәлдік дәрежесімен есептеу мүмкіндігі туады.

Сұрақты жалпы түрде қоймас бұрын кейбір дербес жағдайларды қарастырып өтейік.

Дәрежелік

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

қатарын алайық. Бұл қатар, еселігі x-ке тең геометриялық прогрессияны кескіндеп, $|x| < 1$ болуында жинақталатынын және қосындысы $\frac{1}{1-x}$ -ге тең болатынын көргенбіз. Демек

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad . \tag{3.35}$$

деп жазуымызға болады. Осы қосындыны теңдік деп қана ұғынбай, $\frac{1}{1-x}$ функциясының дәрежелік қатарға жіктелуі деген жаңа көзқарасқа көтерілуге болады. Бұл қатар x айнымалысының өспелі дәрежелері бойынша орналасқан. (3.35) жіктемесінен, үлкен қызығушылық туғызатын басқалай жіктемелер шығарып алған қиын емес.

11.1. ln*(1 + x) функциясының жіктемесі*

(3.35) жіктемесінде x-ті z-пен алмастырып,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n + \qquad (3.36)$$

теңдігіне келеміз. Егер $0 \le |z| \le |x| < 1$ болса, онда §10-да айтылғандай, (3.36) теңдігін 0-ден x-ке дейінгі аралықта z бойынша мүшелеп интегралдауға болады. Сондықтан (3.36) теңдігін dz-ке көбейтіп және 0-ден x-ке дейінгі аралықта интегралдаса, онда

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z} = \int_0^x dz - \int_0^x zdz + \int_0^x z^2 dz - \dots + (-1)^n \int_0^x z^n dz + \dots .$$

Бұдан $\ln(1+z)\Big|_0^x = \frac{z}{1}\Big|_0^x - \frac{z^2}{2}\Big|_0^x + \frac{z^3}{3}\Big|_0^x - \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x + \dots,$

немесе егер $|x| < 1$ болса,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots .$$

Осы жіктелу $x = 1$ мәнінде де орындалатынын көрсетуге болады, демек

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots .$$

11.2. arctg x функциясының жіктелуі

(3.35) жіктелуінде $x = -z^2$ деп ұйғарайық. Сонда

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots + (-1)^n z^{zn} + \dots$$

Соңғы теңдікті dz-ке көбейтіп және 0-ден x-ке дейінгі аралықта мүшелеп интегралдасақ (мұнда $|x| < 1$)

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^x dz - \int_0^x z^2 dz + \int_0^x z^4 dz - ... + (-1)^n \int_0^x z^{2n} dz + ...$$

немесе $arctg\ z \Big|_0^x = z\Big|_0^x - \frac{z^3}{3}\Big|_0^x + \frac{z^5}{5}\Big|_0^x - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x + ...$ жіктелесіне келеміз. $arctg\ 0 = 0$ болғандықтан, нәтижесінде, егер $|x| < 1$ болса,

$$arctg\,\mathrm{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

жіктелуі алынады. Мұндай жіктелу $x = 1$ және $x = -1$ болғанда да әділ болып қала береді. Дербес жағдайда, $x = 1$ болуында

$$arctg\,1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...$$

Көптеген функциялар, мәселен ln(1+x), $arctg\,x$ және т.б. функциялар x аргументіне қатысты дәрежелік қатарға жіктелуді мүмкін ететінін көріп отырмыз. Берілген $f(x)$ функциясын x айнымалысының теріс емес бүтін өспелі дәрежелері бойынша жіктелуі жөніндегі мәселені көтерген орынды. Келесі тармақта осы мәселемен айналысамыз.

§12. Маклорен қатары

Берілген $f(x)$ функциясы дәрежелік

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + ... \qquad (3.37)$$

қатарына жіктелуі мүмкін деп ұйғарайық, мұндағы a_0, a_1, a_2,...- анықталмаған коэффициенттер, оның үстіне $|x| < R$ жинақтылық интервалы нүктеге азғындалмайды, атап айтқанда $R > 0$. Жоғарыда атап өтілгендей, (3.37) дәрежелік қатарын оның жинақтылық интервалында кез келген санмен мүшелеп дифференциалдауға болады. Мұндайда шыққан қатарлардың барлығы жинақты, ал олардың қосындылары сәйкес туындыларға тең болады.

(3.37) қатарын шектеусіз, сан рет мүшелеп дифференциалдағаннан алатынымыз:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + \ldots,$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + 3\cdot 4\cdot 5a_5x^2 + \ldots,$$

$$f^{(4)}(x) = 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5x + \ldots .$$

Осы теңдіктер мен (3.37)-де $x = 0$ деп ұйғарып,

$$f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1,\ f''(0) = 2a_2,\ f'''(0) = 2\cdot 3a_3,\ f^{(4)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4a_4, \ldots$$

мәндеріне келеміз. Олардан

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1},\ a_2 = \frac{f''(0)}{1\cdot 2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3},\ a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ldots$$

болатыны туындайды. Осы табылған $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ коэффициенттерінің мәндерін (3.37) қатарына қойғаннан ***Маклорен қатары*** деп аталатын

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (3.38)$$

қатарын шығарып аламыз.

§13. Кейбір функциялардың дәрежелік қатарға жіктелуінде Маклорен қатарын қолдану

13.1. e^x функциясын жіктеу

$f(x) = e^x$ болсын. Сонда

$$f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ f'''(x) = e^x,\ f^{(4)}(x) = e^x, \ldots$$

Мұнда x=0 мәнін қойғаннан

$$f(0) = e^0 = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1,\ f'''(0) = 1,\ f^{(4)}(0) = 1, \ldots$$

Осы мәндерді (3.38) Маклорен қатарына қою нәтижесінде алатынымыз

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \qquad (3.39)$$

Осы формуланың оң жағындағы қатардың жалпы мүшесі $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Оның мүшелерінің модульдерінен жасалған қатарға Даламбер белгісін қолданып,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{x^n\cdot(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

болатынын шығарып аламыз. Демек $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ дәрежелік қатары кез келген x үшін жинақталады, атап айтқанда, оның жинақтылық интервалы (-∞,+) болады. Арнаулы әдебиетте кез келген x мәні үшін осы қатардың қосындысы e^x-ке тең болатыны, атап айтқанда (3.39) жіктемесі кез келген x үшін орынды болатыны дәлелденеді.

13.2. **sin** *x функциясының жіктелуі*

f(x)=sin x болсын. Бұдан
$f'(x)$ = cos$x$, $f''(x)$ = - sin$x$, $f'''(x)$ = -cos$x$, $f^{iv}(x)$ = sin$x$, ...
Әрі қарай x = 0 деп ұйғарып,

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0, ...$$

мәндерін табамыз. Осы мәндерді Маклорен қатарына қойып,

$$\sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+... \qquad (3.40)$$

жіктемесіне келеміз, мұнда x радиандарда өлшенеді. Соңғы формуланың оң жағындағы қатар кез келген x-те жинақталатынына көз жеткізуге болады.

Сол сияқты оның қосындысы sin x-ке тең болатынын, атап айтқанда, (3.40) жіктелуі x-тің кез келген мәнінде әділ болатынын дәлелдеуге болады.

13.3. **cos***x функциясының жіктелуі*

Егер $f(x) = \cos x$ болса, онда

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{iv}(x) = \cos x$, …

Мұнда $x = 0$ деп ұйғарғаннан, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{iv}(x) = 1$,… . Осы мәндерді Маклорен формуласына қойғаннан, радиандарда өлшенетін x үшін

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - .... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad (3.41)$$

формуласын аламыз. Бұл қатар (3.40) қатарына ұқсас кез келген x-те жинақталатынына көз жеткізу қиын емес. Осы қатардың қосындысы cos x-ке тең болатыны дәлелденеді. (3.41) жіктелуін (3.40) жіктелуінен оны мүшелеп дифференциалдағаннан да алуға болады.

13.4. Ньютон биномының жіктелуі

$f(x)=(1+x)^m$ болсын, мұнда m - бүтін не бөлшек, оң немесе теріс сан. Сонда

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$$

……………………………………………….

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)........(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Осы формулалардың бәрінде $x = 0$ деп ұйғарып,

$$f(0) = 1,\ f'(0) = m,\ f''(0) = m(m - 1),\ f'''(0) = m(m - 1)(m - 2),...$$

$$...,\ f^{(n)}(0) = = m(m - 1)(m - 2)\cdot\ldots\cdot(m - n + 1),....$$

мәндерін табамыз. Осы табылған $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$,…, $f^{(n)}(0)$,… өрнектерін §12-тегі Маклорен қатарына қойғаннан

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots . n}x^n+\ldots . \quad (3.42)$$

Сырт қарағанда Ньютон биномының формуласы бөлшек немесе теріс көрсеткіш үшін бүтін оң көрсеткішіне жазылғандай жазылады. Егер m - бүтін оң сан болса, онда $n = m+1$ болуында $m - n+1$ көбейткіші нөлге тең. Демек (3.42) қатары үзіліп, шексіз жіктелудің орнына шектеулі қосынды шығады.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

формуласы арқылы (3.42) формуласының оң жағында тұрған қатардың ($-R$, R) жинақтылық интервалын анықтайық. Ол үшін

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n};$$

$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2).......(m-n+1)(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}$$

мүшелері бойынша

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n+1}{m-n}\right|,$$

демек, $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1$ болатынын табамыз.

Сонымен, биномиалды қатар $-1 < x < +1$ интервал ішінде жинақталып, оның сыртында жинақталмайды.

Қатардың $x=-1$ және $x=1$ болуында жинақталуын зерттеу үшін әр жағдайды жеке талдау қажет.

§14. Жуықтап есептеуде дәрежелік қатарларды қолдану

Табылған жіктемелер функцияның дербес мәндерін есептеуге, кейбір «алынбайтын» анықталған интегралдарды жуықтап есептеуге мүмкіндік береді. Бірнеше мысал қарастырайық.

14.1. $\sin 1$*-ді есептеу*

$\sin 1$ жіктемесінде $x = 1$ деп алып,

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

теңдігіне келеміз. Төртінші мүшеден бастап барлық мүшелерді алып тастағанда, қателігі абсолют шамасы бойынша $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$ санынан кіші болады (өйткені $\sin 1$ үшін жазылған қатар Лейбниц теоремасын қанағаттандырады). Бұдан 0,0002 дейінгі дәлдікпен

$$\sin 1 \approx Sin 57^0 18' \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0.8417 \,.$$

14.2. Түбірлерді есептеу

$\sqrt[3]{9}$ түбірін есептеу талап етіледі.

Осы өрнекті

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/3}$$

түріне келтіріп және Ньютон биномының формуласында $m = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{8}$ деп алсақ,

$$\sqrt[3]{9} = 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \cdots\right] =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41472} - \cdots\right) \approx 2\left(1 + 0{,}0417 - 0{,}0017 + 0{,}0001\right) = 2{,}0802.$$

Ал кестелер бойынша $\sqrt[3]{9} = 2{,}0801.$

14.3. Натурал логарифмдерді есептеу

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \cdots \qquad (3.43)$$

жіктемесі табылған болатын. (3.43) қатары $x > 1$ мәндерінде жинақталмайтын болғандықтан, 2-ден асатын сандардың натурал логарифмдерін есептеуге жарамсыз. Алайда оны негіз етіп мақсатымызға қол жеткізетін басқа бір қатар табуымызға болады. Ол үшін (3.43) формуласында x-ті $-x$-пен алмастырып

$$\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \ldots \qquad (3.44)$$

қатарын шығарып аламыз. (3.43) және (3.44) қатарларының екеуі де ортақ $|x| < 1$ жинақтылық интервалына ие. Жинақталатын қатарларды мүшелеп қосуға немесе азайтуға болатыны белгілі. Сондықтан $|x| < 1$ деп болжап, (3.43) теңдігінен (3.44) теңдігін шегеріп,

$$\ell n\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \right) \qquad (3.45)$$

қатарына келеміз. $\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}$ $(N > 0)$ деп алсақ, $x = \frac{1}{2N+1}$ болатаны шығады. Осы мәндерді (3.45) қатарына қойып,

$$\ell n(N+1) - \ell nN = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2N+1)^7} + \cdots \right] \qquad (3.46)$$

қатарын шығарып аламыз.

Даламбер белгісін қолданып, (3.46) қатарының кез келген оң N саны үшін жинақталатынына оп-оңай көз жеткізуге болады. Демек осы қатарды пайдаланып, бірте-бірте барлық бүтін оң сандардың натурал логарифмдерін анықтай аламыз.

14.4. Қатарларды анықталған интегралдарды есептеуге қолдану

Мәселен, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ анықталған интегралын есептеу талап етілсін. Мұнда интеграласты $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ функциясы $x\neq 0$ болғанда анықталған. $x=0$ болуында үзілісіздікке сәйкес $f(0)=1$ деп ұйғарамыз.

Сәйкес $\int \frac{\sin x}{x}dx$ анықталмаған интегралы элементар функцияларда өрнектелінбейді, атап айтқанда, «алынбайтын интегралды» кескіндейді. Олай болса Ньютон-Лейбниц формуласын мұнда қолдануға болмайды. Осыған қарамастан бастапқы анықталған интеграл қатарлар көмегімен жуықтап есептелуі мүмкін.

sin x-ке жазылған қатарды *x*-ке мүшелеп бөліп,

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...$$

қатынасына, ал оны мүшелеп интегралдағаннан

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1 dx-\frac{1}{3!}\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{5!}\int x^4dx-...=x\Big|_0^1-\frac{1}{3!}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{1}{5!}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-...=$$

$$=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-...\approx 0,94611$$

жуық мәніне келеміз.

Қатар ауыспалы таңбалы және оның мүшелерінің модульдері монотонды кемитіндіктен, оның үш мүшесімен шектеліп, қателігі $\frac{1}{7!\cdot 7}=\frac{1}{35280}<0,00003$ санынан кіші екенін көреміз.

§15. Тейлор қатары

Кейбір жағдайларда $f(x)$ функциясы немесе оның туындысы (мәселен, $f(x)=lnx$ немесе $f(x)=\sqrt{x}$ функциялары) $x=0$ болуында мағынасын жоғалтады. Мұндай функциялар Маклорен қатарына жіктеле алмайды. Мұндай функцияларды жіктеу үшін кейде $x-a$ айырымының өспелі дәрежелері бойынша орналасқан (a – таңдап алынған тұрақты сан) неғұрлым жалпы дәрежелік қатарларды пайдалануға болады.

$f(x)$ функциясы кейбір $|x-a|<R$ интервалында орынды және x - a айырымының өспелі дәрежелері бойынша орналасқан

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+A_3(x-a)^3+A_4(x-a)^4+\dots \quad (3.47)$$

жіктемесін мүмкін еткізсін.

$x-a=z$ деп ұйғарайық. Сонда (3.47) жіктемесі

$$F(z)=f(z+a)=A_0+A_1z+A_2z^2+\dots, \quad (3.48)$$

түріне келеді. Демек, §12–ге сәйкес (3.48) жіктемесі $F(z)$ функциясына жазылған Маклорен қатары болып табылады. $F^{(n)}(z)=f^{(n)}(z+a)$ ($n=1, 2,\dots$) болғандықтан, бұдан

$$A_0=F(0)=f(a),\ A_1=\frac{F'(0)}{1!}=\frac{f'(a)}{1!},\ A_2=\frac{F''(0)}{2!}=\frac{f''(a)}{2!},\dots,$$

$$A_n=\frac{F^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\dots$$

Коэффициенттердің осы мәндерін (3.47) қатарына қойғаннан кейін,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+ \quad (3.49)$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

түрінде кескінделген және ***Тейлор қатары*** деп аталған қатарды шығарып аламыз. Дербес жағдайда мұнда $a=0$ деп алсақ,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\frac{f'''(a)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

Маклорен қатарына келеміз.

(3.49) формуласында шектеулі саны бар мүшелерді ғана қалдырсақ, Тейлор қатарының орнына ***Тейлор көпмүшесі*** деп аталған және

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{3.50}$$

формуласымен кескінделген көпмүше шығарып аламыз. (3.49) қатары a нүктесінің кейбір аймағында жіктелетін болып, оның қосындысы $f(x)$ функциясына тең болса, онда $P_n(x)$ көпмүшесі $f(x)$ функциясының U_a аймағындағы жуық кескіндемесін береді.

1-мысал. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 3$ көпмүшесін x - 2 айырымының өспелі дәрежелері бойынша жіктеп жазыңыз. $f(x)$ функциясын дифференциалдасақ:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8,\ f''(x) = 6x - 10,\ f'''(x) = 6,$$

ал $n > 3$ үшін $f^{(n)}(x) = 0$. Мұнда $x = 2$ мәнін қойғаннан

$f(2) = 7,\ f'(2) = 0,\ f''(2) = 2,\ f'''(2) = 6,$ ал $n > 3$ үшін $f^{(n)}(2) = 0.$

(3.49) Тейлор қатары негізінде, x - 2 айырымының өспелі дәрежелері бойынша жіктелген $f(x)$ функциясы

$$f(x) = 7 + \frac{x-2}{1}\cdot 0 + \frac{(x-2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(x-2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6$$

немесе нәтижелік $f(x) = 7 + (x - 2)^2 + (x - 2)^3$ түрінде кескінделеді.

2-мысал. $f(x) = lnx$ функциясын x - 1 айырымының өспелі дәрежелері бойынша жіктеңіз. Функцияны дифференциалдау нәтижесінде

$$f^{/}(x) = \frac{1}{x},\ f^{//}(x) = -\frac{1}{x^2},\ f^{///}(x) = \frac{1\cdot 2}{x^3},\ f^{IV}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4},...$$

Бұдан

$$f^{/}(1) = 1,\ f^{//}(1) = -1,\ f^{///}(1) = 1\cdot 2,\ f^{IV}(x) = -1\cdot 2\cdot 3,...$$

Демек

$$ln\, x = ln1 +$$